数理解析研究所講究録
283巻 1976年 25-33

Schläfli 関数の反復積分表示

東大 教養学部　　青本和彦

§1. S^n を n 次元の単位球 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$ とし，$S_1, S_2, \cdots, S_{n+1}$ を原点を通る一般の位置にある $(n+1)$ 個の超平面達とする；$f_j=0$ を S_j の方程式とし $f_1\geqq 0, \cdots, f_{n+1}\geqq 0$ によって定義される単体を Δ，$\langle ij\rangle$ を S_i と S_j との ~~面~~ 角とする時 Δ の体積 V は積分

$$\int_\Delta \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}x_j\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}$$

によって与えられ これを $a_{ij}=-\cos\langle ij\rangle$ の関数と考える時 Schläfli 関数とよばれる．$\Delta(\varepsilon_1 i_1, \cdots, \varepsilon_p i_p)$ 又は $V(\varepsilon_1 i_1, \cdots, \varepsilon_p i_p)$ $(1\leqq p\leqq n+1,\ \varepsilon_j=\pm 1)$ は S^n の中の不等式 $\varepsilon_1 f_{i_1}\geqq 0, \cdots, \varepsilon_p f_{i_p}\geqq 0$ によって定義される領域又はその体積を表わすとすれば次の Gauß-Bonnet 定理が成り立つ。

Prop. 1　n 奇数として

$$\frac{(n-1)}{2}|S^n| = \sum_{\nu=2}^{n-1} \sum_{i_1<\cdots<i_\nu} (-1)^\nu V(i_1, i_2, \cdots, i_\nu)$$

又 n 偶数として

$$\frac{(n-1)}{2}|S^n| = \sum_{\nu=2}^{n} \sum_{i_1<\cdots<i_\nu} (-1)^\nu V(i_1\, i_2 \cdots i_\nu) -$$

$$-2\ V(1, 2, \cdots, n+1).$$

この Prop. によって $V(\varepsilon_1 i_1, \cdots, \varepsilon_p i_p)$ はすべて S^n の体積 $|S^n|$, $V(ij)$, $V(i_1 i_2 i_3 i_4)$, $\cdots$, $V(i_1 \cdots i_{2\nu})$　$\nu = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ の線型結合であることがわかる.

§2.　A は対称行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & 1 & \cdots & & a_{2\,n+1} \\ & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{n\,n+1} \\ a_{n+1\,1} & \cdots & & a_{n+1\,n} & 1 \end{pmatrix}$$

を表わすとして　$D\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p \\ j_1 \cdots j_p \end{pmatrix}$ は $i_1, \cdots, i_p$ 行 $j_1 \cdots j_p$ 列の小行列式，　$D(i_1 \cdots i_p)$ は $D\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p \\ i_1 \cdots i_p \end{pmatrix}$，　$D(1\,2 \cdots n+1) = D$ とおく.

$I=\{i_1,\cdots,i_p\}$ として $|I|=p$ とおく．
$\Delta^*(i_1\cdots i_p)$ を Δ に含まれる $S_{i_1\cdots i_p}$：
$f_{i_1}=0,\cdots,f_{i_p}=0$ によって定義される部分複体
とし $V^*(i_1\cdots i_p)$ は $\Delta^*(i_1\cdots i_p)$ の体積とする．この時 Schläfli の公式

$$dV=\sum_{i<j}V^*(i,j)\,d\langle i,j\rangle$$

が知られている．

今から n を奇数として $n=2\nu-1$ とおく．
T を 3 角行列

$$T=\begin{pmatrix}1 & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ t_{n+1\,1} & t_{n+1\,2} & & t_{n+1\,n+1}\end{pmatrix}$$

$t_{22}>0,\cdots,t_{n+1\,n+1}>0$ で $T\,{}^tT=A$ によって定義される一意のものとする．すると

$$\langle 1,2\rangle=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{-t_{21}+i\,t_{22}}{-t_{21}-i\,t_{22}}\right)$$

Schläfliの公式を $V^*(I)$ に適用して

$$dV^*(I) = \sum_{\substack{j_1<j_2 \\ I\cap(j_1j_2)=\phi}} V^*(I,(j_1j_2))\, d\left\langle {I \atop j_1j_2} \right\rangle$$

ここに $\left\langle {I \atop j_1j_2} \right\rangle$ は $\Delta^*(I)$ において見込まれる

S_{j_1} と S_{j_2} との面角とする。すると

$$\left\langle {12 \atop 34} \right\rangle = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{-t_{43}+it_{44}}{-t_{43}-it_{44}}\right)$$

$$\left\langle {1\ 2 \cdots 2\mu-3\ \ 2\mu-2 \atop 2\mu-1,\ 2\mu} \right\rangle = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{-t_{2\mu,2\mu-1}+it_{2\mu,2\mu}}{-t_{2\mu,2\mu-1}-it_{2\mu,2\mu}}\right)$$

$(0\leqq\mu\leqq\nu-1)$. これらは A の小行列式達を用いて表示され V は反復積分表示となる。

[記号] I と J を添字集合 $I=(i_1,\cdots,i_p)$ $J=(i_1\cdots i_p\ i_{p+1}\ i_{p+2})$ として 1次型式

$$\frac{1}{2i}\, d\log\left(\frac{-D\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p\ i_{p+1} \\ i_1\cdots i_p\ i_{p+2}\end{pmatrix}+i\sqrt{D(I)D(J)}}{-D\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p\ i_{p+1} \\ i_1\cdots i_p\ i_{p+2}\end{pmatrix}-i\sqrt{D(I)D(J)}}\right)$$

を $\omega\left({I \atop J}\right)$ とおく。

(定義) $\mathfrak{X}$ を A を変数とする複素アフィン空間とし $\mathfrak{X}_{i_1\cdots i_p}$ を $D(i_1 i_2\cdots i_p)=0$ によって定義される因子とする. $\hat{\mathfrak{X}}$ を $\mathfrak{X}_{i_1 i_2\cdots i_{2\mu}}$ $(1\leq\mu\leq\nu)$ で分岐する $\sqrt{D(i_1 i_2\cdots i_{2\mu})}$ を一意化する $2^{(2^n-1)}$ 次の $\mathfrak{X}$ 上の被覆空間とする. π を $\hat{\mathfrak{X}}$ から $\mathfrak{X}$ への全射とする. すると $\omega\left(\frac{I}{J}\right)$ $(|I|=\text{even})$ は $\hat{\mathfrak{X}}$ の log poles の 1-形式で 極は ∞ 及び $\pi^{-1}(\mathfrak{X}_{i_1\cdots i_{2\mu-1}})$. $M=\hat{\mathfrak{X}}-\bigcup_{\substack{i_1<\cdots<i_{2\mu-1}\\ 1\leq\mu\leq\nu}}\pi^{-1}(\mathfrak{X}_{i_1\cdots i_{2\mu-1}})\cup\pi^{-1}(\infty)$ とおき $\Omega(M;p,q)$ は p を始点, q を終点とする連続曲線の空間(道空間)とする. このとき $\omega_1,\cdots,\omega_m$ を任意のそれぞれ l_1 次, $\cdots$, l_m 次 M 上の微分形式として m 次反復積分

$$\int\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_m$$

は $\Omega(M;p,q)$ 上の $l_1+\cdots+l_m-m$ 次微分形式として定義される(Chen).

この状況のもとに

[定理]

$$V=\sum_{(I_0\subset I_1\subset\cdots\subset I_\nu)}\sum_{\sigma=0}^{\nu}\int_E^A\omega\binom{I_0}{I_1}\omega\binom{I_1}{I_2}\cdots\omega\binom{I_{\sigma-1}}{I_\sigma}\cdot$$

$\dfrac{|S^{n-2\sigma}|}{2^{n+1-2\sigma}}$ ，ここで $|S^{-1}|=1$，$I_0, I_1, \cdots, I_\nu$ は i) $|I_0|=0$，$|I_1|=2, \cdots, |I_\nu|=2\nu$ ii) $I_0=\phi\subset I_1\subset\cdots\subset I_\nu$ をみたす添字集合全体にわたる．V は $\Omega(M;E,*)$ 上の関数だが実は その homotopy 類にしかよらない．この事は等式 ($|I|+4=|J|$，$I\subset J$ に対して)

$$\sum_{\substack{|K|=|I|+2\\ I\subset K\subset J}}\omega\binom{I}{K}\wedge\omega\binom{K}{J}=0$$

からもわかる．

Poincaré，Lappo-Danilevski にならってこれらの関数を "超 log" と呼ぶ．V は ν 次の超 log である．

§3. Vのベキ級数展開

V は又

$$V=(n+1)\int_{\substack{f_1\geqq 0,\cdots,f_{n+1}\geqq 0\\ 1\geqq x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2}} dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}$$

と書ける. B を $K^{-1}A^{-1}K^{-1}$ によって定義される行列とする. ここで K は対角行列でその $(i\,i)$ 成分は $\sqrt{\dfrac{D(1\cdots i\text{-}1\ i\text{+}1\cdots n+1)}{D(1\,2\cdots i\cdots n+1)}}$.

この時

[定理]

$$\frac{2^{n+1}D}{n+1}V=\sum_{\sigma_{ij}\geqq 0}\frac{\prod(-2b_{ij})^{\sigma_{ij}}}{\prod_{i<j}\sigma_{ij}\,!}\,.$$

$$\cdot\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}\Gamma\left(\frac{\sigma_{1k}+\cdots+\sigma_{k-1\,k}+\sigma_{k\,k+1}+\cdots+\sigma_{k\,n+1}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}$$

が成立し 右辺は収束する. これは一般化された超幾何関数で Mellin-Sato 型と呼んでおくことにする.

最後に素朴な質問を掲げておくことにする.
log は $n=1$ の V の体積を表示するに用いられその逆は exp であった. それは又加法公式によって特徴づけられるものでもある. $n>1$ の場合対応する加法公式とは何か? 又その逆とはどんな意味合いのものであろうか?

$$\log \xleftrightarrow{\text{逆}} \exp$$

$$\text{hyper}\log \xleftrightarrow{\text{逆}} \text{hyper}\exp\ ?$$

$$\text{Abel integral} \xleftrightarrow{\text{逆}} \vartheta\text{-funct.}$$

. . . .

[文献]

◎ K.T. Chen, Iterated integrals of differential forms and loop space homology, Ann. of Math. 97 (1973), 217–246

◎ ——, Iterated integrals, fundamental groups and covering spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 83–98

◎ H.S.M. Coxeter, The functions of

Schläfli and Lobatschefsky, Quart. J. Math. 6 (1935), 13–29

◎ S. Iitaka Logarithmic forms of algebraic varieties, to appear

◎ H. Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie, Comptes rendus T. 140 (1905), 113–117

◎ M. Sato, Singular orbits in prehomogeneous vector spaces, Lec. Notes at Univ. of Tokyo, 1972.

◎ L. Schläfli, On the multiple integral $\int\int\cdots\int dx\,dy\cdots dz$ whose limits are $p_1 = ax + by + \cdots + hz > 0$, $p_2 > 0, \cdots, p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \cdots + z^2 < 1$, Quart. J. of Math. 3 (1860), 54–68, 97–108.